RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MAXIMAIS SOBRE VOLUME E ÁREA: um enfoque para o ensino básico em paralelo com o ensino superior

Fernando Soster Bortolotto | fernando.sb1988@aluno.ifsc.edu.br

RESUMO

Os problemas de aplicações de derivadas envolvem conceitos matemáticos hoje considerados exclusivos do ensino superior. Problemas como a determinação do volume máximo de um paralelepípedo reto-retângulo, ou a determinação do ponto máximo para a função lucro de determinada produção de uma fábrica, que aparecem na disciplina de Cálculo I. Foi o que se procurou resolver na elaboração deste trabalho, sem deixar de oferecer problemas possíveis de serem apresentados ainda na escola básica. O problema da determinação da figura de maior área, a partir das possibilidades de representação de um retângulo, foi incluído com o intuito de motivar alunos e professores a explorarem a lógica dedutiva da matemática, sem requisitar ainda do aluno o conceito de derivada. Desta forma, este trabalho pretende tanto demonstrar as potencialidades de aplicação da derivada como aplicar a matemática do ensino básico de maneira a alcançar resultados práticos e igualmente satisfatórios.

Palavras-chave: derivada; maximais; área; volume; ensino.

1. INTRODUÇÃO

O presente texto é uma formalização do resultado apresentado na disciplina de Cálculo I do curso de Licenciatura em Matemática do IFSC, turma 2024.1, em que procura-se responder a algumas questões de aplicações de derivadas, em particular ao problema do volume máximo de um paralelepípedo reto-retângulo. Partindo da sua planificação e a dobradura de uma folha A4 será feita a montagem da caixa de volume máximo (sem tampa). O leitor também terá a oportunidade de acompanhar o desenvolvimento de um problema relacionado, da geometria plana, que discute a área máxima de um retângulo, com o uso exclusivo dos conceitos da matemática vistos na escola básica. Também é possível acompanhar o vídeo da apresentação na semana acadêmica 2025, organizada pelo IFSC, e que está disponível em nossas referências.

2. MÉTODO

O método utilizado neste documento é o lógico-dedutivo, que permite chegar a conclusões verdadeiras a partir de premissas verdadeiras. A metodologia empregada durante o processo de resolução deste problema foi através do diálogo mantido durante e após as aulas da professora Marleide Coan Cardoso. Dessa forma, a classificação referente a metodologia do trabalho enquadra-se na “problem based learning”, em outras palavras, a metodologia do aprendizado ativo.

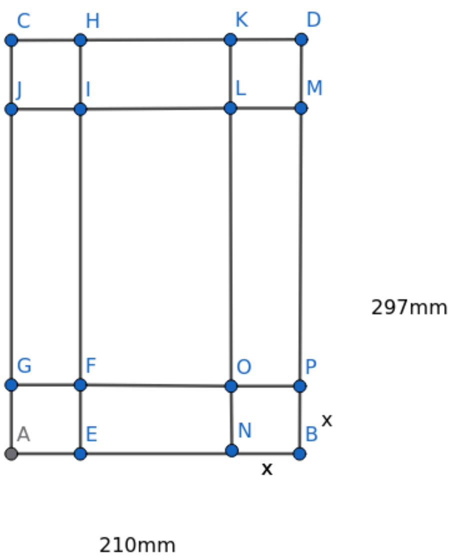
3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MAXIMAIS SOBRE VOLUME E ÁREA

3.1 Problema da caixa de maior volume

Para iniciar vamos considerar o problema proposto pela professora Marleide Coan Cardoso:

> “Cada grupo organizado no primeiro encontro, com suas respectivas dimensões de folha e com a folha A4 deve construir uma caixa sem tampa em cada folha, dobrando os 4 cantos de cada folha de maneira que esta tenha volume máximo, ou seja, garantir que o volume da caixa seja o maior possível com tais dimensões de folha.”

Nessa primeira etapa, o desafio era considerar a medida que seriam dobrados os lados da folha, conforme a figura abaixo, que permitiria a construção de uma caixa com volume máximo. O que equivale a dizer, *determinar* a medida do lado *x*, confira a seguir:



Passo 1) Interpretação do problema e de seus dados: Dimensão da a folha A3 dobrada ao meio: 210mm x 297mm;

Passo 2) determinar a função Volume em relação a variável h, altura, pela figura ao lado, em que os lados da folha serão dobrados em uma distância “x”, que valerá a mesma altura da caixa. Usaremos a letra x como variável, por facilitar os cálculos. Então a expressão para área da base é

A fórmula de volume para o sólido geométrico é dada por: $V = Ab.h$

Passo 3)$Ab.h = (210 - 2x)(297 - 2x)x = V(h)$.

Multiplicando,

$(210.297 - 210.2x - 297.2x + 2x.2x)x$

Fazendo a redução de termos semelhantes, obtemos:$(4x^2 - 1.014x + 62.370)x$

Pela distributiva, $V(h) = 4x^3 - 1.014x^2 + 62.370x$

Obtivemos um avanço significativo na compreensão do problema ao traduzirmos toda a situação-problema para a linguagem matemática. A partir daqui, o conceito de derivada será decisivo para a nossa tarefa de determinar o tamanho de “x”, lado do quadrado, ou, o que é o mesmo, a altura “h” da caixa montada.

Inicialmente, utilizaremos o operador de derivação para fazer o tratamento do polinômio, e depois apresentaremos o teorema que permite descobrir o valor que maximiza o volume na primeira equação.

Passo 4) Derivar a função V(h). Aplicação da regra da potência, observe como a regra reduz o grau das potências por 1 e multiplica cada coeficiente pelo expoente original:

$$V'(h) = \frac{d}{dx}(4\,x^3 - 1.014x^2 + 62.370x)$$

$$V'(h) = 4.3x^{3-1} + (-\ 2).1014x^{2-1} + 1.62.370x^{1-1}$$

$$V'(h) = 12x^2 - 2.028x + 62.370$$

Antes de proceder ao próximo passo, enunciamos o teorema que nos garante a existência de um ponto crítico (máximo ou mínimo) para a função volume. De acordo com nossa bibliografia referenciada (Costa e Guerra, 2009): “Teorema 5.1. Seja f uma função derivável em x_0. Se f tem um máximo ou mínimo local em x_0, então $f'(x_0) = 0$”. Procedemos então a resolução de uma equação de segundo grau:

$$12x^2 - 2.028x + 62.370 = 0$$
$$Por\ Bhaskara,\ \Delta = (-2.028)^2 - 4.12.62.370$$
$$\Delta \simeq 1.057,8\ (aproximando\ para\ uma\ casa\ após\ a\ vírgula)$$
$$x_1 = (2.028 + 1.057,8) \div 24 = 128,58\text{mm}$$
$$x_2 = (2.028 - 1.057,8) \div 24 = 40,4\text{mm}$$

A raiz x_1 = 128,58 será desconsiderada já que o valor do menor lado da folha é 210mm e assim, $210 < 257,16 = 2.(128,58)$, portanto não teria papel disponível para dobrar.

Recorremos aos mesmos autores (Costa e Guerra, 2024) para esclarecer que, entretanto, nossa suposição de que x_2=40,4 seja ponto de máximo pode não ser verdade:

> “O teorema afirma que, se a função f é derivável em um ponto onde há um máximo ou mínimo da função, então neste ponto f ´= 0. Esta é uma condição necessária, mas não suficiente para ocorrência de máximo ou mínimo no ponto. Como exemplo, a função $f(x) = x^3$, que tem zero em um ponto que não é de máximo nem de mínimo. (...) Outro caso possível de ocorrer é aquele onde uma função não é derivável num dado ponto (p.156).”

Para completar a verificação de um ponto de máximo local, nos valemos do teste da derivada segunda, a seguir:

Passo 6 (final): Consideremos a raiz x_2 = 40,4mm.

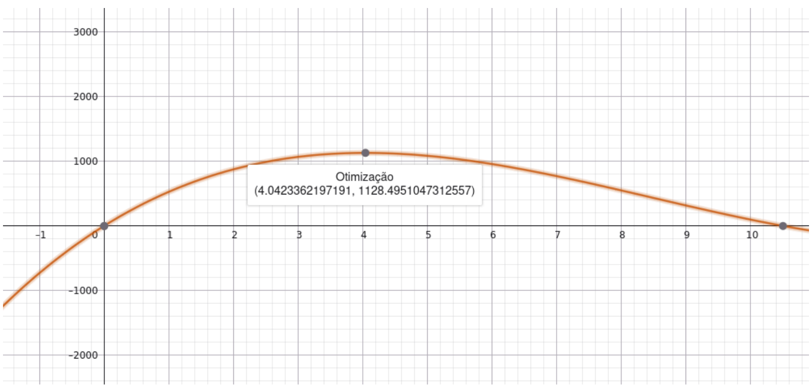
Sendo $V'(h) = 12x^2 - 2.028x + 62.370$,

Pela regra da potência, $V''(h) = 2.12x^1 - 2.028.1 + 0$

Fazendo a conversão, $40,4\ mm = 4,04$cm e,

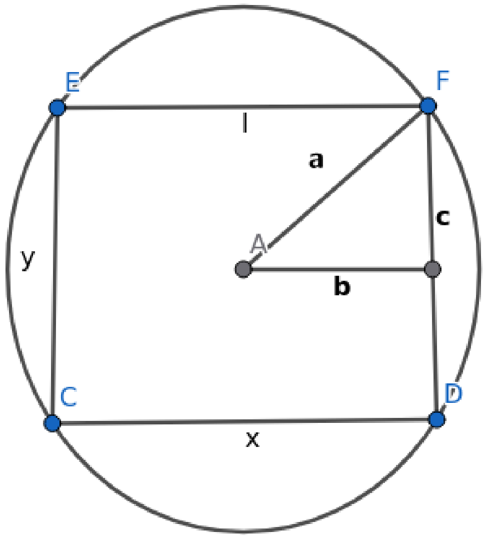
$$V''(4,04) = 24.(4,04) - 2.028 = -1.931,04.$$

Por ter sinal negativo no teste da derivada segunda, segue que h = 4,04cm é ponto de **máximo** local. Devido à ressalva anterior, é saudável obter o gráfico da função, antes de avançar a próxima resolução de problemas.



Na figura: $Y_{vértice}$=4,042…

3.2 Problema da maximização da área de um retângulo



Vamos provar que o **quadrado** é o retângulo (pela classificação dos quadriláteros) que retorna área máxima, a partir da figura ao lado, recriada com Geogebra de nossas referências (Oliveira, 2009). Acompanhe de maneira ativa, vendo cada passo e tentando realizar as contas por si mesmo, depois passe ao próximo passo.

Sabemos da fórmula para encontrar a área de um retângulo, então partimos disto: $A = xy$. Para nosso propósito, será interessante utilizar para medida de área os segmentos b e c. Isso porque ganharemos as relações decorrentes da aplicação do teorema de Pitágoras. Assim,

$$Na\ figura,\ x = 2b,\ y = 2c,\ a\ \acute{e}\ a\ hipotenusa$$

$$A = 2b.2c$$

Sabemos pelo Teorema de Pitágoras que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = b^2 - a^2 \rightarrow c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Logo, substituímos “c” na fórmula da área A,

$$A = 2b.2.(\sqrt{b^2 - a^2})$$

Nesse momento, procedemos elevando ao quadrado ambos os lados da equação, para retirar da raiz.

$$A^2 = 4b^2.4(b^2 - a^2)$$

Aplicando a distributiva,

$$A^2 = 4b^2.(4b^2 - 4a^2) = 16b^4 - 16a^2b^2$$

Utilizamos o artifício, ensinado no tópico de equação biquadrada, $b^2 = k$ e substituímos, a fim de reduzir o grau do polinômio ao multiplicar:

$$A^2 = 16k^2 - 16a^2k\ (Equação\ da\ área\ elevada\ ao\ quadrado)$$

Para o próximo passo, vamos utilizar uma fatoração que o leitor deve reconhecer como o método para resolver equações de 2º grau chamado completamento de quadrados.

$$Temos\ A^2 = 16k^2 - 16a^2k = \ - 16a^2k + 16k^2$$

$$relacionando\ com\ (a - b)^2,\ para\ que\ \ a\ seja\ k\ e\ b,\ \frac{a^2}{2}$$

$$Como\ \ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,\ então\ para\ nossa\ equação\ vale:$$

$$A^2 = - 16a^2k + 16k^2\ ,\ comparemos\ com\ \ [- 16(k - \frac{a^2}{2})^2]$$

$$desenvolvendo\ [- 16(k - \frac{a^2}{2})^2] \ = \ - 16(k^2 - 2\frac{a^2k}{2} + \frac{a^4}{4})$$

$$Mas\ (16k^2 - 16a^2k) \ \neq (- 16k^2 + 16a^2k) \ - 4a^4\ ,\ o\ último\ termo\ está\ "sobrando"$$

No fundo, uma boa maneira de visualizar este método é pensar como somar zero à equação anterior, e garantirmos isso somando o seu oposto $+ 4a^4$ na igualdade acima:

$$A^2 = (-16k^2 + 16a^2k) - 4a^4 + 4a^4 = -16k^2 + 16a^2k + 0$$

Tendo justificado o porquê do termo ter sido acrescentado, será importante visualizar o que acontece com os termos da equação a partir dessa forma:

$$A^2 = -16(k - \frac{a^2}{2})^2 + 4a^4 \ (Equação\ da\ área\ elevada\ ao\ quadrado)$$

Como o coeficiente do primeiro termo é um número negativo, podemos assumir que seu valor será *máximo* quando o termo que ele está multiplicando for *nulo*. E vem a pergunta-chave: para que valor essa diferença se anula?

$$k - \frac{a^2}{2} = 0,\ somente\ se\ k = \frac{a^2}{2}$$

Mas k representa o lado b elevado ao quadrado:

$$b^2 = \frac{a^2}{2},\ e\ portanto:\ b = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Por último, desfazendo a substituição que tinha sido feita, podemos relacionar ambos os lados do retângulo para retirar a hipotenusa “a” da nossa equação:

$$Se\ c = \sqrt{b^2 - a^2},\ c = \sqrt{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$Portanto,\ para\ b\ e\ c\ a\ medida\ é\ a\ mesma,\ b = \frac{a}{\sqrt{2}} = c.$$

Basta ver que, se chamarmos de “l” estas medidas, é imediato que $A = l^2$. Na geometria plana, a figura que é formada por um retângulo de lados iguais ganha o nome de quadrado. E assim, como queríamos demonstrar “o quadrado é o retângulo que retorna área máxima”.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os problemas oferecem uma oportunidade de comparação dos métodos para resolução da área/volume máxima(o), em relação a figuras planas e espaciais. Não há aqui qualquer referência a um método de cálculo por derivadas quanto ao problema do retângulo de maior área, o que justifica sua utilização em planos de aula no ensino médio.

REFERÊNCIAS

COSTA, Gustavo A. T. F. da; GUERRA, Fernando. **Cálculo I**. 2. ed. Florianópolis: Editora da Ufsc, 2009. 221 p. Disponível em: https://arquivos.ufsc.br/f/faab8057ed764edfa305/. Acesso em: 30 out. 2025.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática**: um curso com problemas e soluções.. 2. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2012. 291 p.

Link para apresentação na semana acadêmica 2025 (a partir de 2h 34min): https://www.youtube.com/live/CxHar0YebmU?si=wPbvgI887HeKXKn7