Usando equações diferenciais para analisar deflexão de viga fina

Fernanda Krüger Tomaschewski[1]
Yves-garnard IRILAN[2],

Resumo: *A deflexão pode ser vista como a deformação sofrida por elementos estruturais, como vigas, devido a algum carregamento perpendicular à barra, existem várias maneiras de se amenizar essa deformação, cabendo ao projetista a escolha do método mais viável. O estudo da deflexão por meio do método da linha elástica remete ao estudo das Equações Diferenciais. A linha elástica tem seu comportamento dependendo das características da barra, como os carregamentos a ela aplicados. A depender do tipo de carregamento, aumenta-se a complexidade para a análise da deflexão, uma barra submetida a mudança de carregamentos é descrita por mais de uma função, subdividindo-a em vários segmentos. O objetivo deste trabalho é mostrar uma aplicação das Equações Diferenciais à análise estrutural, mais especificamente à deflexão de vigas, visando um melhor entendimento dos recursos e da aprendizagem das Equações Diferenciais através da utilização da mesma no comportamento de estruturas. Assim, realizou-se o estudo de uma viga biapoiada que possui seus pontos de apoio posicionados nas extremidades da mesma e um carregamento pontual ao longo de sua extensão, onde apresenta-se as deduções matemáticas das Equações Diferenciais que modelam esses fenômenos. Por fim, por meio das equações deduzidas, resolve-se um problema aplicado e determina-se a deflexão máxima dessa viga.*

Palavras-Chave:
*Deflexão; Equações Diferenciais; Estruturas; Linha Elástica***.**

1 INTRODUÇÃO

A determinação da deflexão sofrida em elementos estruturais de barra, como vigas ou colunas, é de grande importância, uma vez que esses elementos estão presentes em diversos tipos de estruturas na construção civil, cujo “as especificações de projeto de uma viga geralmente incluem um valor máximo admissível para sua deflexão” (BEER, 2008, p. 550), e estas devem ser determinadas para os esforços e condições de uso a qual serão submetidas..

Para a determinação da deflexão em quaisquer pontos dos elementos de barra, deve-se determinar a equação diferencial linear de segunda ordem que descreve a linha elástica e caracteriza o formato da barra deformada (BEER, 2008).

Na maioria dos elementos de barra a linha elástica pode ser traçada de maneira relativamente simples, porém, deve-se ter conhecimento sobre o comportamento da estrutura, com base nos tipos de carregamentos aplicados e o tipo de apoio empregado, o que caracteriza o comportamento da inclinação ou deslocamento da barra (HIBBELER, 2010).

O presente trabalho tem por objetivo solucionar deflexões em elementos estruturais de barra por meio da formulação de uma equação diferencial ordinária (EDO), para a obtenção da linha elástica, demonstrando por esse, como o estudo das EDO’s pode ser aplicado à teoria das estruturas.

Docente (a) do curso de Engenharia Civil do Instituto Federal de Santa Catarina.
fernanda.tomaschewski@ifsc.edu.br.
* Docente (a) do curso Engenharia de Produção do Instituto Federal de Santa Catarina.
yves.irilan@ifsc.edu.br

2 METODOLOGIA

O presente trabalho foi realizado com base em pesquisa bibliográfica. Assim, apresenta-se uma viga isostática submetida a um carregamento e as considerações feitas, durante o processo, para obtenção da deflexão da mesma. Além disso, obteve-se as Equações diferenciais para cada tipo de deflexão. Por fim, aplica-se valores numéricos para análise da equação da linha elástica.

3 RESULTADOS

3.1 Equações Diferenciais da Curva de Deflexão

Quando se tem um elemento estrutural com um eixo longitudinal reto (vigas por exemplo) e submetidos a carregamentos de maneira ortogonal ao sentido longitudinal da barra (forças laterais), a deformação gerada por esses carregamentos gera uma curva de deformação, chamada de curva de deflexão.

Apesar de apresentar grande importância por si só, o estudo da linha elástica e da deformação em elementos de barra, é essencial para outros aspectos na teoria das estruturas (NETO, 2017):

- A resolução de estruturas com grau de hiperestaticidade, onde as equações da estática não são suficientes para a obtenção dos esforços internos;
- O estudo da estabilidade de estruturas formadas por barras esbeltas;
- Verificação da segurança em relação às deformações excessivas da estrutura;
- A análise das vibrações.

O estudo da deflexão da barra parte de alguns princípios, os quais devem ser atendidos para realizar a análise da deformação da barra. Segundo Neto (2017), as hipóteses que devem ser consideradas são:

i. as deformações, as rotações e os deslocamentos devem ser pequenos, para que as equações de equilíbrio possam ser escritas na configuração indeformada da estrutura;

ii. o material da barra é homogêneo, isotrópico e elástico linear;

iii. a barra tem eixo reto na configuração indeformada e a variação das dimensões da seção transversal é pequena ao longo da barra;

iv. as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo deformado da barra (hipótese de Navier).

Em decorrência desses fatores, surgem valores para a deflexão e para o ângulo formado por ela, em relação ao eixo inicial da barra, uma vez que “em decorrência da hipótese de Navier, os planos das seções formam um ângulo $d\theta$ e as fibras longitudinais formam arcos concêntricos após a deformação” (NETO, 2017, p. 04).

A equação que descreve o comportamento da linha elástica é dada pela Eq.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}. \quad (1)$$

Ao realizarmos duas integrações sucessivas, conduz à rotação em cada seção ($\theta = dy/dx$), e a deforma do eixo da barra ($y = V(x)$), (GOMES, 2009). Sendo y a medida da deflexão da barra, $M(x)$ o momento fletor, E o módulo de elasticidade do material e I o momento de inércia da seção transversal. O produto entre o módulo de elasticidade e o momento de inércia, pode ser chamado de produto de rigidez a flexão (NETO, 2017). Desta forma, quanto maior forem seus valores, menor será a deflexão sofrida pela estrutura.

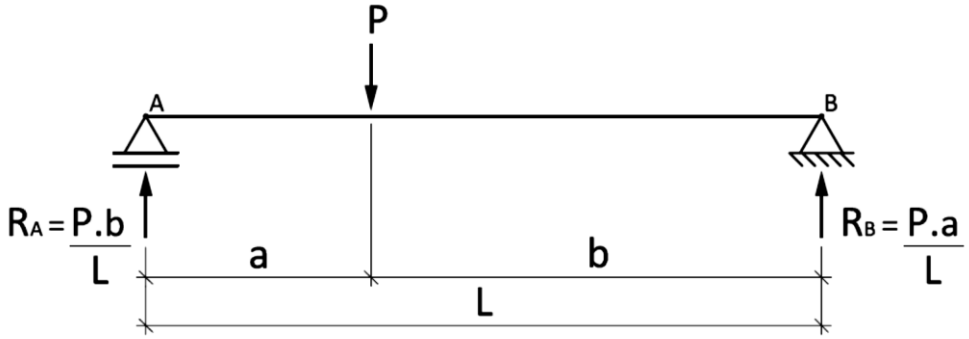
Quando todos os pontos da barra seguem valores de momento fletor descritos por uma única função $M(x)$, a inclinação $\theta = dy/dx$ e a deflexão y em qualquer ponto da barra podem ser obtidas através de duas integrações sucessivas. No processo de integração surgirão duas constantes, as quais deverão ser determinadas a partir de condições de contorno referentes ao gráfico da deformação e suas propriedades (BEER, 2008).

Quando há uma descontinuidade na função do momento fletor $M(x)$ para diferentes segmentos da barra, ou seja, quando a barra apresenta mais de uma seção de análise dos esforços solicitantes internos caso haja necessidade de diferentes funções analíticas para representar o momento fletor nas várias partes da viga, serão necessárias também diferentes equações diferenciais, que nos levarão a diferentes funções definindo a linha elástica nas várias partes da viga (BEER, 2008).

3.2 Viga Biapoiada com Variação de Momento Fletor

O modelo de viga apresentado na Figura 1, possui seus pontos de apoio posicionados nas suas extremidades e possui um carregamento pontual aplicado ao longo de sua extensão. Desta forma, surgem duas seções para a análise da equação da linha elástica e quatro constantes advindas do processo de integração.

Figura 1 – Esquema genérico de viga biapoiada com carregamento pontual



Fonte: Os autores.

As reações dos apoios A e B são dadas em função das medidas a, b e L, e do carregamento pontual P. Por haver mudança de carregamentos na extensão da viga, surgem duas seções de análise, onde será verificado a equação do momento fletor $M(x)$ em cada uma delas.

$$\sum M = 0$$

$$M_1(x) = \frac{Pb}{L}x, \qquad 0 \leq x \leq a \tag{2}$$

$$M_2(x) = Px\left(\frac{b}{L} - 1\right) + Pa, \qquad a \leq x \leq L. \tag{3}$$

Substituindo a Eq. (1) nas Eqs. (2) e (3) e resolvendo as EDOs por integração direta, obtemos:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{1}{EI}.\frac{Pb}{L}x$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI}\left[\int\int \frac{Pb}{L}x\, dx^2\right]$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pbx^3}{6L} + c_1x + c_2\right] \qquad 0 \leq x \leq a. \tag{4}$$

E,

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left[Px\left(\frac{b}{L} - 1\right) + Pa\right]$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI}\left[\int\int Px\left(\frac{b}{L} - 1\right) + Pa\, dx^2\right]$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{Px^3}{6}\left(\frac{b}{L} - 1\right) + \frac{Pax^2}{2} + c_3x + c_4\right] \qquad a \le x \le L. \tag{5}$$

As Eqs (4) e (5) são referentes aos dois segmentos da viga, descrevendo a linha elástica em função de quatro constantes de integração. Essas equações, por si só, não são capazes de descrever o formato da linha elástica, pois elas descrevem um conjunto se possíveis soluções, onde cada segmento, até então, não se encontra correlacionado ao outro. Para correlacionar as equações e encontrar as constantes, devem ser aplicadas condições de contorno, que atribuem valores conhecidos em um determinado ponto, os quais variam de caso a caso.

Desta forma, considera-se o deslocamento nulo sobre os apoios, a deflexão e a rotação no ponto em comum dos dois segmentos da viga não possui descontinuidade. Obtém-se as seguintes condições de contorno:

$$y_1(0) = 0 \tag{6}$$

$$y_2(L) = 0 \tag{7}$$

$$y_1(a) = y_2(a) \tag{8}$$

$$\frac{dy_1(a)}{dx} = \frac{dy_2(a)}{dx}. \tag{9}$$

Aplicando as CC (6) e (7) nas Eqs.(4) e (5), obtém-se:

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{Pb0^3}{6L} + c_10 + c_2\right] = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$$

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{PL^3}{6}\left(\frac{b}{L} - 1\right) + \frac{PaL^2}{2} + c_3L + c_4\right] = 0 \Longrightarrow c_4 = -\frac{PL^2(b - L + 3a)}{6} - c_3L. \tag{10}$$

Derivando as Eqs. (4) e (5) e aplicando a CC (9), obtém-se:

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{Pba^2}{2L} + c_1\right] = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pa^2}{2}\left(\frac{b}{L} - 1\right) + Pa^2 + c_3\right] \Longrightarrow c_1 = \frac{Pa^2}{2} + c_3. \tag{11}$$

Aplicando a CC (8) e substituindo c_4 e c_1 na equação resultante, obtém-se

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{Pba^3}{6L} + c_1a + c_2\right] = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pa^3}{6}\left(\frac{b}{L} - 1\right) + \frac{Pa^3}{2} + c_3a + c_4\right]$$

$$\Longrightarrow c_3 = -\frac{P\left(a^3 + L^2(b - L + 3a)\right)}{6L} \tag{12}$$

Substitui-se a Eq. (12) nas Eqs. (10) e (11), tem-se

$$c_4 = \frac{Pa^3}{6} \tag{13}$$

$$c_1 = \frac{Pa^2}{2} - \frac{P\left(a^3 + L^2(b - L + 3a)\right)}{6L}. \tag{14}$$

Ao obter-se o valor de todas as constantes de integração, reescreve-se as equações que descrevem a linha elástica, substituindo os valores de cada constante.

$$y_1(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pbx^3}{6L} + \frac{Pa^2}{2}x - \frac{P\left(a^3 + L^2(b - L + 3a)\right)}{6L}x\right], \qquad 0 \le x \le a \qquad (15)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{Px^3}{6}\left(\frac{b}{L} - 1\right) + \frac{Pax^2}{2} - \frac{P\left(a^3 + L^2(b - L + 3a)\right)}{6L}x + \frac{Pa^3}{6}\right], \quad a \le x \le L. \qquad (16)$$

As Eqs. (15) e (16) representam o valor da deflexão por toda a extremidade da viga.

3.2.1 Aplicando Valores as Constantes

Assumindo valores numéricos para os termos algébricos da equação da linha elástica.

Tabela 1 – Valores adotados

Item	Quantidade
E	210 GPa
I	$5.10^{-5}m^4$
P	10 KN
a	1 m
b	3 m
L	4 m

Substituindo os valores da Tabela 1 nas Eqs. (15) e (16), obtém-se:

$$y_1(x) = \frac{1}{210.10^6.5.10^{-5}}\left[\frac{10.3.x^3}{6.4} + \frac{10.1^2}{2}x - \frac{10\left(1^3 + 4^2(3 - 4 + 3.1)\right)}{6.4}x\right]$$

$$y_1(x) = \frac{1}{10500}\left[\frac{5x^3}{4} - \frac{35}{4}x\right], \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (17)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{210.10^6.5.10^{-5}}\left[\frac{10.x^3}{6}\left(\frac{3}{4} - 1\right) + \frac{10.1.x^2}{2} - \frac{10\left(1^3 + 4^2(3 - 4 + 3.1)\right)}{6.4}x + \frac{10.1^3}{6}\right],$$

$$y_2(x) = \frac{1}{10500}\left[-\frac{5}{12}x^3 + 5x^2 - \frac{55}{4}x + \frac{5}{3}\right], \qquad 1 \le x \le 4 \qquad (18)$$

Na análise de estruturas busca-se os maiores valores de solicitações, e deformações, para as estruturas. Para obtenção do ponto de maior deflexão, utiliza-se

da teoria de máximos e mínimos, onde os máximos referem-se a deflexão positiva da viga, e os pontos de mínimo referem-se aos pontos de maior deflexão negativa da viga. Para obtenção do ponto de maior deflexão diferencia-se a equação da deflexão, e iguala-se a mesma a zero, fazendo analogia a inclinação (ou rotação) naquele ponto da viga.

$$y_2' = -\frac{x^2}{8400} + \frac{x}{1050} - \frac{11}{8400} = 0 \Longrightarrow\ x = 4 - \sqrt{5} = 1{,}7639\ m \tag{19}$$

Calculou-se apenas o segundo segmento devido a tendência da deformação mais significativa ocorrer de maneira centrada, porém todavia, a teoria de máximos e mínimos pode ser aplicada a todos os segmentos da viga, sendo os valores da máximos e mínimos aqueles que se encontrarem dentro do domínio do segmento. Ao aplicar-se o valor obtido em (19) na Eq. (18), obtém-se o máximo valor de deflexão

$$y_2(1{,}7639) = \frac{1}{10500}\left[-\frac{5}{12}(1{,}7639)^3 + 5(1{,}7639)^2 - \frac{55}{4}.(1{,}7639) + \frac{5}{3}\right]$$

$$y_2(max) = -0{,}000887328\ m \tag{20}$$

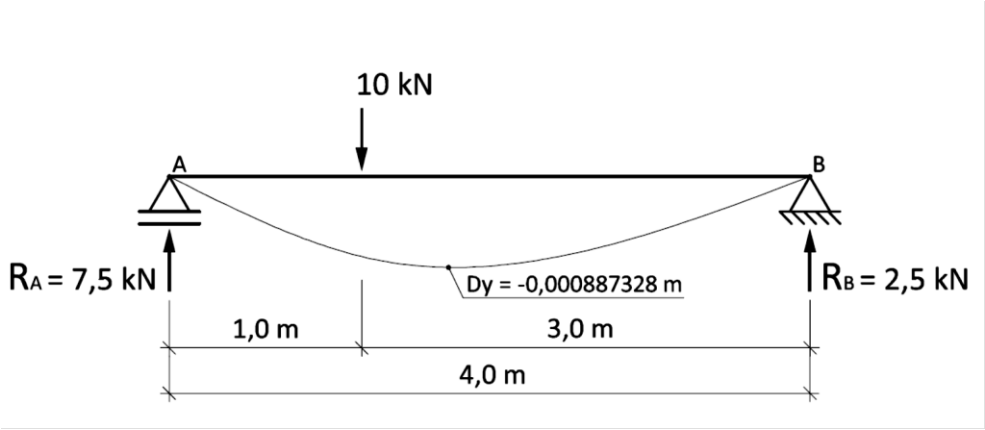


Figura 2 – Modelo analítico da viga

Fonte: O Autor (Ftool)

Portanto, a deflexão máxima para o exemplo proposto é de $-0{,}000887328$ m, ocorrendo em 1,7639 m do comprimento da viga (ver Figura 2).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo do comportamento da deflexão é imprescindível para a teoria de estruturas, ela permite ao projetista prever as deformações sofridas por elementos estruturais (como vigas) e poder combater ou reduzir tais deformações.

Com base na equação da linha elástica, para reduzir a deflexão podem ser adotadas algumas soluções. Uma delas seria aumentar o módulo de elasticidade do material ou o momento de inércia da seção, podendo também ser empregado alguma técnica para reduzir o momento fletor. Podem também ser adotadas outras técnicas construtivas, como a execução da contra flecha, que prevê a deflexão e se executa uma curvatura contrária à deformação.

Portanto, ao realizar o estudo do comportamento de vigas percebemos a importância da relação da matemática e engenharia. Portanto, as equações diferenciais permitem a análise da deflexão por meio da integração direta, demonstrando assim a aplicabilidade das equações diferenciais na construção civil.

REFERÊNCIAS

BEER, F. P. et al.; **Mecânica dos Materiais**. 5ª Ed. – São Paulo: AMGH Editora LTDA, 2008.

GOMES, JF Silva. **Deflexão de Vigas Isostáticas, Cap. VII-Mecânica dos Materiais e Estruturas Lineares**. Teoria e Aplicações. 2009.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos Materiais.** 7ª Ed. - Pearson Educación, 2010.

NETO, S. A. EDGARD.; **Deformação e Deslocamentos na Flexão**. USP, 2017.