Uma Análise Matemática Particular das Características Essenciais de Quadrados Mágicos de ordem ímpar: Sugestão Pedagógica no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática

Edel Alexandre Silva Pontes[1] Andréia Leodório Guarino[2]
Janaina Rodrigues de Miranda[3] Janaine Ferreira dos Santos[4]
Maria Aldenise Barbosa dos Santos[5] Mateus Batista Ferreira[6]
Mayara dos Santos Soares[7]

RESUMO
Diversas pesquisas são realizadas em Educação Matemática e áreas afins na intenção de encontrar estratégias eficientes no processo de ensino e aprendizagem de matemática, com foco em desafios matemáticos. Este artigo estuda um caso particular de Quadrados Mágicos de ordem ímpar, na intenção de sugerir esse modelo matemático como atividade pedagógica regular no ato de ensinar e no ato de aprender matemática na educação básica. Vários matemáticos se envolveram em estudos sobre cubos e quadrados mágicos, principalmente na busca por respostas sobre suas relações, construções e classificação. Metodologicamente, exporemos alguns conceitos, teoremas e propriedades sobre Quadrados Mágicos e construiremos, em especial, os quadrados Mágicos de ordem ímpar. Espera-se que a utilização dos Quadrados Mágicos possa motivar o estudante a prosseguir seus estudos em busca de respostas para suas inquietações sobre a adequada aplicação da matemática em sua vida.

Palavras-Chave: Ensino e aprendizagem de matemática, Quadrados Mágicos.

Introdução

Atualmente, inúmeras pesquisas são realizadas em Educação Matemática e áreas afins na finalidade de encontrar estratégias eficientes no processo de ensino e aprendizagem de matemática, com foco em desafios matemáticos.

> A matemática não pode ser visualizada como algo que existe por si só, sem relação com o homem e a natureza. É preciso perceber que seus modelos são extremamente substanciais para explicar os fenômenos do mundo e, desta forma, a sociedade deve exigir que a prática pedagógica do ensino e aprendizagem de matemática, nas bancas escolares, seja condizente com sua importância para a existência de tudo (PONTES, 2019b, p. 10).

O currículo de matemática, na educação básica, necessita passar por um sensato procedimento de realinhamento e deve ser repensado através de novas técnicas

[1] Pesquisador, Professor Titular do Instituto Federal de Alagoas – Campus Rio Largo. edel.pontes@ifal.edu.br
[2] Estudante do curso de Licenciatura em Química da Universidade Federal de Alagoas. andreia.leodorio@gmail.com
[3] Estudante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas. janainarodriguesdemiranda@gmail.com
[4] Estudante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas. janainesantosifal@gmail.com
[5] Estudante do curso Técnico em Informática do Instituto Federal de Alagoas – Campus Rio Largo. barbosadenise351@gmail.com
[6] Estudante do curso Técnico em Informática do Instituto Federal de Alagoas – Campus Rio Largo.mateusferreira22817@gmail.com
[7] Estudante do curso Técnico em Informática do Instituto Federal de Alagoas – Campus Rio Largo. mayara988985779@gmail.com

metodológicas que instiguem os estudantes por meio da vinculação a assuntos do cotidiano.

> A falta de motivação e interesse dos alunos pela Matemática é um dos principais problemas que fazem com que o rendimento escolar nessa disciplina seja desastroso nos três níveis de ensino. Isto ocorre porque, na grande maioria das vezes, as aulas são monótonas, sem relações com o cotidiano do aluno nem com outras áreas do conhecimento, e nada desafiadoras (KRUSE, 2012, p. 65).

Pontes (2019a) afirma que a sala de aula se torna ambiente agradável quando se apresentam práticas motivadoras e criativas em harmonia com o mundo contemporâneo, composto de indivíduos intuitivos, com raciocínio lógico apurado, e de pensamento matemático aumentado.

> Temos uma tendência de ensinar matemática como uma longa lista de regras. Você as aprende numa ordem e deve obedecê-las, caso contrário tira nota baixa. Isso não é matemática. Matemática é o estudo de coisas que aparecem de certo modo porque não poderiam ser de modo diferente. [...] Nem tudo na matemática pode ser perfeitamente transparente para a nossa intuição como a adição e a multiplicação (ELLENBERG, 2015, p. 21).

Este trabalho estuda um caso particular de Quadrados Mágicos de ordem ímpar, na intenção de sugerir esse modelo matemático como atividade regular no processo de ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. Em seguida, apresenta-se uma sugestão de prática pedagógica que pode induzir o estudante a pensar matematicamente.

A Origem dos Quadrados Mágicos

Segundo uma lenda chinesa (2200 A.C.), o imperador — engenheiro da antiga China Yu, o Grande, da dinastia Hsia, estava meditando nas margens de um dos afluentes do rio Amarelo, quando surgiu uma tartaruga divina, animal sagrado na época, cujo osso temporal, seu casco, estava marcado nove números em três colunas de três números cada formando um quadrado conforme a Figura I. Essas marcas são atualmente chamadas de Quadrado Mágico de Lo Shu ou Quadrado Mágico de Saturno.

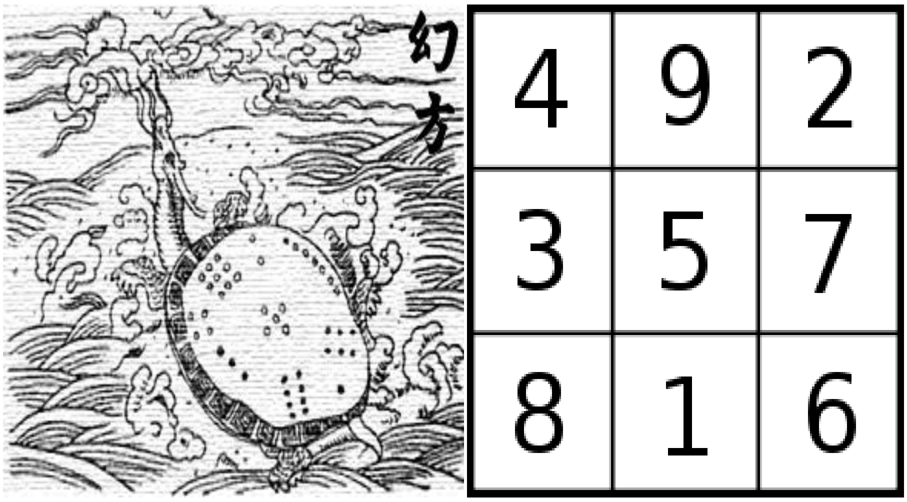

Figura 1: Tartaruga de Lo Shu e o Quadrado Mágico de Lo Shu
FONTE: www.google.com.be/quadradosmagicos

Percebe-se que as marcas de Lo Shu correspondem a números que formam um quadrado, as somas nas linhas, colunas e diagonais possui o mesmo resultado 15. O Quadrado Mágico de Lo Shu ou de Saturno, revelação secreta do universo: os números pares simbolizavam o princípio feminino, o Yin; e os números ímpares simbolizava o princípio masculino, o Yang. Além disso, o número 5 representava a Terra, Centro, Neutralidade e Saturno; 3 e 4 são Madeira; enquanto Leste simboliza Primavera e Júpiter; 6 e 7 são Metal, Oeste, Outono e Vênus; já 9 é Fogo, Sul, Calor, Polaris e Marte; 1 é Água, Norte, Frio Vega e Mercúrio; 2 representa Terra, Sudoeste, Ponto de Transição de Yin; por fim, 8 é Terra, Nordeste, Ponto de Transição Yang. Diante disto, os chineses acreditavam que quem possuísse um quadrado mágico de Lo Shu teria muita sorte e grande felicidade, uma vez que reuniria os princípios básicos que formavam o universo.

> Na Idade Média os quadrados mágicos eram gravados em lâminas de prata como amuleto da peste negra. Os quadrados mágicos têm grande interesse em alguns meios. Na China e na Índia, há quem use tais quadrados mágicos gravados em metal ou pedra, como amuletos ou talismãs. Despertaram também interesse em alguns matemáticos, pelos problemas difíceis que originaram, em relação a construção, classificação e enumeração dos quadrados de uma dada ordem (SANTINHO; MACHADO, 2006, p. 2).

Os Quadrados Mágicos ficaram conhecidos na Europa a partir da Espanha; o responsável foi o filósofo e astrólogo hispano-judeu Abraham Ben Meir ibn Ezra (1090–1167) que traduziu diversas obras árabes para o hebraico que descreviam os quadrados mágicos e numerologia em geral. No início do século XIV, o escritor, professor bizantino

Manuel Moschopoulos apresentou sua obra chamada Tratado de Quadrados Mágicos (1315).

Em 1510, Heinrich Cornelius Agrippa Von Nettesheim (1486–1535), um intelectual polemista e influente escritor da Renascença, escreveu “De Occulta Philosophia”. A obra tratava de Quadrados Mágicos de ordem 3 até à ordem 9, onde cada quadrado estava associado a um planeta astrológico.

Em 1514, o pintor alemão renascentista Albrecht Dürer, em sua gravura intitulada Melancolia, um ser alado sentado e cercado de objetos, apresentou um dos primeiros Quadrados Mágicos impresso (Figura 2). Observa-se que o quadrado mágico contém 16 números, distribuídos em quatro linhas horizontais e quatro linhas verticais; a soma dos números é igual a 34. Nota-se, na gravura, que Dürer utiliza o Quadrado Mágico para incorporar a data da criação de sua obra, usando os números da parte inferior do seu Quadrado Mágico 15 e 14 (1514).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 2: Gravura Melancolia de Albrecht Dürer — 1514
FONTE: www.google.com.be/melancoliaAlbrechtDürer

Diversos outros matemáticos, entre eles Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783), se envolveram em pesquisa sobre cubos e quadrados mágicos, principalmente na busca por respostas sobre suas relações, construções e classificação.

Quadrados Mágicos: seus Conceitos, Teoremas e Relações

Kraitchik (1942) e Gardner (1961) definem que um quadrado mágico de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n com n^2 inteiros, de modo que a soma dos números de qualquer linha, qualquer coluna e as diagonais têm o mesmo valor. Para Andrews (1960), um quadrado mágico consiste em uma série de números arranjados em um quadrado, de maneira que cada linha, coluna e ambas diagonais de canto devem ter a mesma quantidade, denominada soma.

Essa soma é chamada constante mágica $S(n)$. Um quadrado latino de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n, contendo n^2 elementos distintos, de forma que cada linha ou coluna não possua elementos repetidos.

Teorema da Constante Mágica: Seja um Quadrado Mágico de ordem n, então $S(n) = \frac{n(n^2+1)}{2}$.

Prova: Sejam $1, 2, 3, \cdots, n^2$ os n^2 primeiros números inteiros positivos. Se k é a soma de uma coluna, então $S(n) = kn$, Ora, $S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n^2$, daí, $2S(n) = (1 + n^2\ ) + (1 + n^2\ ) + (1 + n^2\ ) + \cdots + (1 + n^2\ )$, ou seja,

$2S(n) = (1 + n^2\ )n^2 \therefore S(n) = \frac{(1+n^2\ )n^2}{2} \therefore kn = \frac{(1+n^2\ )n^2}{2} \therefore k = \frac{(1+n^2\ )n}{2}$ ■

3	4	5	6	7	…	n^2
15	34	65	111	175	…	$\frac{(1 + n^2\ )n}{2}$

Propriedade dos Quadrados Mágicos de Ordem 3: Seja um Quadrado Mágico de ordem 3. Então seu termo central vale 5 e os valores, nos cantos do quadrado, são todos números pares, isto é, $2, 4, 6, 8$.

Andrews (1960) afirma que os quadrados mágicos com um número ímpar de células são normalmente construídos por métodos que diferem da construção de outros quadrados com um mesmo número de células. Neste estudo, discutiremos unicamente sobre quadrados mágicos de ordem ímpar. A resolução de Quadrados Mágicos de ordem ímpar segue a Regra do cavalo (↑→): sobe-se uma fileira superior e move-se uma coluna à direita.

Seja um quadrado Mágico de ordem ímpar. Defina a casa do número 1 como a casa do meio da fileira horizontal superior. Em seguida, o número 2 deve ser colocado subindo uma fileira acima do número 1 e depois se movendo uma coluna à direita. E assim, sucessivamente.

Notas importantes: I. Se o número estiver na parte superior, continue nessa mesma fileira começando pela parte inferior. II. Se a sequência estiver no canto à direita do quadrado mágico, continue na mesma fileira começando pelo lado esquerdo. III. Se a sequência terminar em uma casa já numerada, defina o próximo número na casa diretamente abaixo desta.

Construção de um Quadrado Mágico de ordem ímpar

Conforme explicado, este estudo concentra-se unicamente na construção de Quadrados Mágicos de ordem ímpar. O Quadrado Mágico de ordem 3 será estabelecido utilizando duas regras distintas: (1) pela propriedade para Quadrados Mágicos de ordem 3 e pela regra do cavalo para Quadrados Mágicos de ordem ímpar.

É de nosso mérito expor a construção de um Quadrado Mágico de ordem 3, de modo que constitua o modelo de referência para o desenvolvimento de diferentes Quadrados Mágicos de ordem ímpar. Segundo Teixeira (2014) existem evidências que corroboram o emprego de quadrados mágicos de ordem 3, pelos índios maias e pelo povo hausa de África.

Resolução de um Quadrado Mágico de ordem 3, pela Propriedade: Seguindo o Teorema da Constante Mágica, $S(3) = 15.$ Pela Propriedade dos Quadrados Mágicos de Ordem 3 (Quadro 1) observa-se que o termo central é o número 5 (Quadrado Azul). Ainda pela Propriedade, os valores, nos cantos do quadrado, são todos números pares. Dessa forma, deve-se escolher um dos cantos do quadrado e colocar o número 2 (Quadrado Vermelho). Daí, pela constante mágica, localizamos o número 8 (Quadrado Verde), pois 8+5+2=15. Pode-se agora assentar os números 6 e 4 (Quadrado Laranja), nos outros cantos do quadrado. É possível agora pôr os outros números 1, 3, 5 e 9 (Quadrado Amarelo), acompanhando a constante mágica.

-	-	-
-	5	-
-	-	-

-	-	-
-	5	-
-	-	2

8	-	-
-	5	-
-	-	2

8	-	6
-	5	-
4	-	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Quadro 1 – Resolução dos Quadrados Mágicos de ordem 3.
FONTE: elaboração dos autores

Resolução de um Quadrado Mágico de ordem 3, pela regra do cavalo: uma diferente configuração para construir o Quadrado Mágico de ordem 3 é utilizando a regra do cavalo (↑→), conforme o Quadro 2.

- ✓ Quadrado Amarelo: defina o número 1 na casa do meio da fileira superior.
- ✓ Quadrado Verde: a partir do número 1, subindo uma fileira acima do número 1. Nota-se que o número 1 encontra-se na fileira superior, nesse caso deve-se continuar na fileira inferior. Em seguida, move-se uma coluna à direita, onde estará à casa do número 2.
- ✓ Quadrado Rosa: a partir do número 2, subindo uma fileira superior, a seguir movimenta-se uma coluna à direita, nesse caso desloca-se para coluna do lado esquerdo e coloca-se o número 3.
- ✓ Quadrado Laranja: do número 3, sobe-se uma fileira superior e move-se uma coluna à direita, como existe o número 1 na casa indicada, o próximo número estará na casa imediatamente abaixo do número 3, onde colocaremos o número 4.
- ✓ Quadrado Vermelho: para encontrar a casa do número 5, a partir do número 4, sobe-se uma fileira superior e move-se uma coluna à direita.
- ✓ Quadrado Branco: seguindo a regra do cavalo (↑→): do número 5, chega-se ao número 6.
- ✓ Quadrado Roxo: a partir do número 6, sobe-se uma fileira superior, nesse caso deve-se continuar na fileira inferior. Em seguida, move-se uma coluna à direita, nesse caso desloca-se para coluna do lado esquerdo, como existe o número 4 na casa indicada, o próximo número estará na casa imediatamente abaixo do número 6, onde alocaremos o número 7.
- ✓ Quadrado Azul: do número 7 e seguindo a regra do cavalo (↑→), similar ao quadrado rosa, chega-se ao número 8.
- ✓ Quadrado Marrom: a partir do número 8, sobe-se uma fileira superior, nesse caso deve-se continuar na fileira inferior. Em seguida, move-se uma coluna à direita e coloca-se o número 9.

-	1	-
-	-	-
-	-	-

-	1	-
-	-	-
-	-	2

-	1	-
3	-	-
-	-	2

-	1	-
3	-	-
4	-	2

-	1	-
3	5	-
4	-	2

-	1	6
3	5	-
4	-	2

-	1	6
3	5	7
4	-	2

8	1	6
3	5	7
4	-	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Quadro 2 – Resolução dos Quadrados Mágicos de ordem 3, pelo método do cavalo
FONTE: elaboração dos autores

Por meio da regra do cavalo, podem-se construir os Quadrados Mágicos de ordem ímpar que apresentem as mesmas características. Para essa comprovação, esboçaremos o Quadrado Mágico de ordem 5, Quadro 3. Observe que sua constante mágica equivale a $S(3) = 65$.

		1		

		1		
			2	

		1		
				3
			2	

		1		
4				
				3
			2	

		1		
	5			
4				
				3
			2	

		1		
	5			
4	6			
				3
			2	

		1		
	5	7		
4	6			
				3
			2	

		1	8	
	5	7		
4	6			
				3
			2	

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr>
<td><table>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>7</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td>9</td></tr>
</table></td>
<td><table>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>7</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td>9</td></tr>
</table></td>
<td>...</td>
<td><table>
<tr><td>17</td><td>24</td><td>1</td><td>8</td><td>15</td></tr>
<tr><td>23</td><td>5</td><td>7</td><td>14</td><td>16</td></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td>13</td><td>20</td><td>22</td></tr>
<tr><td>10</td><td>12</td><td>19</td><td>21</td><td>3</td></tr>
<tr><td>11</td><td>18</td><td>25</td><td>2</td><td>9</td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

Quadro 3 – Resolução dos Quadrados Mágicos de ordem 5, pelo método do cavalo
FONTE: elaboração dos autores

Sugestão de uma Prática Pedagógica com Quadrados Mágicos de ordem ímpar: Pensar Matematicamente

Os desafios matemáticos, particularmente os quadrados Mágicos, constituem uma estratégia metodológica bastante interessante para o desenvolvimento do pensamento matemático, pois é uma maneira de fortalecer a criatividade e aperfeiçoar a concepção de modelos complexos.

> Escolher criteriosamente tarefas matemáticas valiosas com potencial para proporcionar aos alunos aprendizagens matemáticas sofisticadas, que vão além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos — estes continuam a ter o seu papel, mas não esgotam a Matemática que os alunos precisam atualmente de aprender e a que têm direito (CANAVARRO, 2011, p. 16-17).

Acredita-se que metodologias provocativas, no sentido de desafiar, possam contribuir efetivamente para a construção de novos conhecimentos e saberes, e compete ao professor de matemática valorizar a disciplina, tornando-a prazerosa a fim de adequar o estudante a uma aprendizagem eficiente.

> Compreendemos a prática pedagógica do professor de matemática, não como um processo linear, nem ordenado ou até mesmo constante, mas como imersa no paradigma da complexidade, onde o desafio está na oposição à regularidade, à constância, ao produto acabado (REDLING, 2011, p. 76).

Uma sugestão será apresentada como prática pedagógica, com quadrados Mágicos de ordem ímpar, que pode ser utilizada no ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. A ideia é fazer com que os estudantes possam pensar matematicamente, partindo de uma atividade.

Atividade proposta: seja o conjunto de números naturais A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Escolhendo três números do conjunto, de quantas maneiras podemos obter soma 15? É possível distribuir todas as combinações possíveis em um quadrado de nove casas?

Pensar Matematicamente: percebe-se que essa atividade induz o estudante a pensar de quantas formas, com três números, posso conseguir formar uma soma 15. Após a determinação das combinações possíveis, tentará o aprendiz observar a possibilidade de distribuir essas sequências de três números no quadrado de nove casas.

Objetivo do exercício: localizar o Quadrado Mágico de ordem 3, pensando matematicamente.

Solução: tomando três números distintos entre 1 e 9, para formar soma 15, teremos as seguintes combinações: a) 1 + 5 + 9; b) 1 + 6 + 8,; c) 2 + 4 + 9; d) 2 + 5 + 8; e) 2 + 6 + 7,; f) 3 + 4 + 8; g) 3 + 5 + 7; h) 4 + 5 + 6. Nota-se que o número 5 se encontra em quatro combinações diferentes, logo deve ficar no centro. Duas das oito combinações têm apenas números ímpares e seis das oito combinações tem dois números pares. Para distribuir no quadrado de nove casas, se faz necessário que distribua as duas sequências de números ímpares na segunda coluna e na segunda fileira horizontal.

-	1	-
3	5	7
-	9	-

Percebe-se, consequentemente, que os números pares devem ficar nos cantos do quadrado, acompanhando corretamente a sequência de combinações pré-estabelecidas.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Concluir-se afirmando que essa atividade transporta a curiosidade do aluno em querer buscar mais informações sobre Quadrados Mágicos com essa característica peculiar.

De acordo com Gadotti (2013), a aquisição do mesmo resultado numérico, ao serem executadas as somas dos algarismos de todas as colunas, linhas e diagonais, desperta uma curiosidade no sujeito envolvido, levando-o a efetivar diversos cálculos para a averiguação de tal propriedade dos quadrados mágicos.

Considerações Finais

Os quadrados mágicos compõem um extraordinário instrumento de ensino e aprendizagem de matemática, que fortalece a intuição e o desenvolvimento do raciocínio lógico do aprendiz, colaborando na compreensão de modelos matemáticos, frequentemente vistos como estruturas complexas.

Espera-se que a utilização de modelos matemáticos, em sala de aula, particularmente a construção de Quadrados Mágicos, possa acender motivação regular para o estudante prosseguir seus estudos em busca de respostas para suas inquietações sobre a adequada aplicação da matemática em sua vida. Uma sugestão que pode ser acatada para um novo trabalho seria um estudo da construção dos Quadrados Mágicos de ordem par.

Referências

ANDREWS, W. S.. **Magic squares and cubes**. New York: Dover Publications, Inc., 1960.

CANAVARRO, A. P.. **Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios.** 2011.

ELLENBERG, J.. **O poder do pensamento matemático: a ciência de como não estar errado**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2015.

GADOTTI, A. C. et al. **Quadrados Mágicos**, 2013.

GARDNER, M. **Magic Squares**. New York: Simon and Schuster, 1961.

KRAITCHIK, M. **Magic Squares**. New York: Norton, 1942.

KRUSE, F.. Curiosidades Matemáticas. **Acta Scientiae**, v. 4, n. 1, p. 65-70, 2012.

PONTES, E. A. S.. Método de Polya para Resolução de Problemas Matemáticos: Uma Proposta Metodológica para o ensino e Aprendizagem de Matemática na Educação Básica. **HOLOS**, v. 3, p. 1-9, 2019.

PONTES, E. A. S.. Conceptual questions of a teacher about the teaching and learning process of mathematics in basic education. **Research, Society and Development**, v. 8, n. 4, p. 784932, 2019.

REDLING, J. P.. **A Metodologia de Resolução de Problemas: concepções e práticas pedagógicas de professores de matemática do ensino fundamental**. 2011.

SANTINHO, M. S.; MACHADO, R. M.. **Os fascinantes Quadrados Mágicos**. 2006.

TEIXEIRA, R. E. C. Matrizes e Quadrados mágicos. **Tribuna das Ilhas**, p. 7, 2014