Um algoritmo genético para o problema de corte unidimensional inteiro

Adriano Heis
CEFETSC-Centro Federal de Educação e Tecnologia de Santa Catarina – Unidade São José
Rua José Lino Kretzer, 608, Praia Comprida, São José – SC, 88.103-310, (48) 3381-2850
E-mail: adriano.heis@cefetsc.edu.br, adriano.heis@gmail.com

Ademir Aparecido Constantino
Departamento de Informática
UEM - Universidade Estadual de Maringá
Av. Colombo, 5790 - Zona 07 Bloco 20 Sala 14A, Maringá PR, 87020-900, (44)3261-4345
ademir@din.uem.br

Silvio A. de Araujo
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Departamento de Ciências da Computação e Estatística
UNESP - Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto SP, 15054-000 (17) 3221-2201
saraujo@ibilce.unesp.br

Resumo: Este trabalho trata do Problema de Corte de Estoque Unidimensional Inteiro que consiste no corte de barras em estoque para produzir itens menores de forma a otimizar uma função objetivo. Estudamos o caso onde se têm várias barras em estoque com tamanhos diferentes e em quantidade limitada. É proposto um novo método heurístico baseado nos conceitos de programação evolutiva, algoritmo genético. Este novo método é analisado a partir de testes com um conjunto de exemplos gerados aleatoriamente.

Palavras Chave: problema de corte de estoque, otimização inteira, heurísticas, programação evolutiva, algoritmo genético.

1. Introdução

O problema de corte consiste em atender uma demanda de itens a partir do corte de material, em geral, com o objetivo de minimizar a perda, ou seja, deve-se determinar a "melhor" forma de cortar unidades maiores (objetos) de maneira a produzir um conjunto de unidades menores (itens). Para tanto, deve-se encontrar um conjunto de padrões de corte (maneira que um objeto é cortado para produzir itens menores) que serão repetidos um certo número de vezes e que satisfaçam algum critério a ser otimizado, por exemplo, minimizar a perda de material gerada pelo corte dos padrões.

Esse problema pode aparecer em diversos processos industriais onde os objetos disponíveis em estoque possuem dimensões padronizadas, como barras de aço, bobinas de papel e alumínio, placas metálicas e de madeira, placas de circuito impresso, chapas de vidro e fibra de vidro, dentre outros e, os itens, com tamanhos especificados pelos clientes, são encomendados através de uma carteira de pedidos.

Os problemas de corte encontrados na prática são, em geral, difíceis de serem tratados devido ao grande número de variáveis envolvidas e devido à restrição de integralidade das variáveis. Portanto, produzir soluções exatas em tempos computacionais razoáveis não é uma tarefa fácil. Desta forma, torna-se interessante o uso de heurísticas para sua resolução.

A importância econômica aliada à dificuldade de resolução de problemas de corte e empacotamento tem motivado grande empenho da comunidade acadêmica na busca de métodos eficientes, o que pode ser notado pelo volume de publicações nos últimos anos.

O presente trabalho apresenta uma heurística alternativa às heurísticas (construtivas e residuais) que têm sido apresentadas na literatura. Para comparar a qualidade da solução e o tempo computacional desta nova heurística utilizaremos o trabalho de Poldi e Arenales (2005).

2. Caracterização do Problema e Modelagem Matermática

Considere que temos disponível em estoque K tipos de objetos (barras, bobinas, etc.) de comprimento $L_k, \ k=1,...,K$, e um conjunto de pedidos, com demanda conhecida $d_i, \ i=1,...,m$, de itens de comprimentos $l_i, \ i=1,...,m$ (os comprimentos dos itens são tais que: $l_i \le L_k, \ k=1,...,K$). O problema consiste em produzir os itens demandados a partir do corte dos objetos em estoque, atendendo a demanda e de modo a otimizar algum objetivo, por exemplo, minimizar a perda de material.

O problema de corte de estoque ocorre quando existe restrição de estoques, ou seja, cada objeto está disponível numa quantidade limitada $e_k, \ k=1,...,K$. Uma segunda variante do problema ocorre quando não é permitido excesso de produção, ou seja, o número total de itens cortados deve ser exatamente igual à demanda original. Pedaços do corte que não sejam os itens demandados são considerados perda. Por fim, não é permitido cortar parte do objeto e devolver o restante para o estoque.

A seguir apresenta-se o modelo matemático:

Dados do problema:

- *m: número de tipos de itens;*
- l_i: comprimento do item *i, i=1, ..., m;*
- d_i: demanda do item tipo *i, i=1,..., m;*
- *K*: número de tipos de objetos em estoque;
- L_k: comprimento do objeto *k, k=1,..., K.*
- e_k: disponibilidade em estoque do objeto *k, k=1, ...K*
- a_{jk} é o vetor correspondente ao *j-ésimo* padrão de corte sobre o objeto *k, j=1, ...,*N_k *k=1, ...K* (um padrão de corte é uma maneira de cortar um objeto em estoque para produzir os itens demandados, para uma definição formal veja Poldi e Arenales, 2005)
- c_{jk} que é o custo do objeto *k*, segundo o padrão de corte *j, j=1,...,*N_k*, k=1,...,K.* Por exemplo, $c_{jk} = L_k - \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_{ijk}$ é a perda no padrão de corte *j* do objeto *k*. Cabe observar que outros custos, tal como, a maximização do lucro dos objetos cortados, poderiam ser considerados.

Variável de decisão:

x_{jk}: número de vezes que o objeto do tipo *k* é cortado usando o padrão *j, j=1, ...,* N_k*, k=1,..., K.*

O problema pode então ser formulado por:

$$\text{Minimizar: } f(x_{11}, x_{21}, \cdots) = \sum_{j=1}^{N_1} c_{j1} x_{j1} + \sum_{j=1}^{N_2} c_{j2} x_{j2} + \cdots + \sum_{j=1}^{N_K} c_{jK} x_{jK} \qquad (1)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{j=1}^{N_1} a_{j1} x_{j1} + \sum_{j=1}^{N_2} a_{j2} x_{j2} + \cdots + \sum_{j=1}^{N_K} c_{jK} x_{jK} = \mathbf{d} \qquad (2)$$

$$\begin{array}{llll} \sum_{j=1}^{N_1} x_{j1} & & & \le e_1 \\ & \sum_{j=1}^{N_{21}} x_{j2} & & \le e_2 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \sum_{j=1}^{N_K} x_{jK} & \le e_K \end{array} \qquad (3)$$

$x_{jk} \ge 0$, e inteiro *j=1,...,* N_k, *k=1,..., K* e **d** vetor demanda. (4)

A função objetivo da Eq. (1) minimiza a perda total do objeto. A restrição da Eq. (2) garante que a quantidade total de itens produzidos seja exatamente igual à demanda. As restrições da Eq. (3) garantem que a quantidade de cada barra disponível em estoque não seja violada. E a última restrição da Eq. (4) garante que a repetição de cada padrão de corte j seja um número inteiro não-negativo.

Em problemas práticos, m (quantidade de tipos de itens) pode ser da ordem de dezenas ou centenas, enquanto que o número de possíveis padrões de corte diferentes (que é o número de colunas) pode ser da ordem de centenas de milhares, o que inviabiliza a resolução direta do problema.

3. Métodos de Resolução

Quando a demanda é suficientemente alta, a resolução do problema por um modelo de otimização linear é adequada, pois a produção de algumas peças em excesso teria um baixo impacto no custo total do problema. Assim, uma abordagem prática para resolver o problema consiste em relaxar a condição de integralidade e resolver o problema relaxado pelo Método Simplex utilizando o processo de Geração de Colunas proposto por Gilmore e Gomory (1961). Obtém-se então a solução ótima para o problema relaxado que, em geral, é fracionária.

Entretanto, em alguns casos, por exemplo, em problemas práticos onde a demanda é baixa, a resolução por otimização linear não é suficiente. Nestes casos, heurísticas têm sido desenvolvidas para obter soluções inteiras. Algumas heurísticas desenvolvidas são apresentadas nos trabalhos de Stadler (1990), Wäscher e Gau (1996), Pinto (1999), Hinxman (1980) e Poldi e Arenales (2005).

Em geral, as heurísticas desenvolvidas, buscam uma solução inteira de duas maneiras. Uma delas, chamada heurística residual, consiste em obter uma solução para o problema relaxado e arredondar as soluções fracionárias para baixo (maior inteiro inferior), posteriormente, resolve-se novamente o problema relaxado considerando apenas a demanda residual (ou seja, o que não foi produzido na primeira resolução devido ao arredondamento). Este procedimento é repetido até que se tenha uma solução aceitável. Um segundo procedimento utilizado para a obtenção de solução inteiras são as chamadas heurísticas de construção, que consiste basicamente em construir um bom padrão de corte e usar este padrão tanto quanto possível, posteriormente, atualiza-se a demanda, e o procedimento é repetido gerando-se um novo padrão de corte. Para gerar um padrão de corte deve-se resolver um problema da mochila.

Para analisarmos compararemos a nossa heurística com a desenvolvida por Poldi e Arenales (2005) que difere das heurísticas residuais tradicionais na maneira de determinar a solução inteira aproximada, nas quais um arredondamento simples é sempre feito. A heurística de Poldi e Arenales (2005) é baseada na idéia de que o arredondamento para o inteiro superior é infactível para todas as freqüências, mas algumas delas poderiam ser arredondadas para o inteiro superior, enquanto outras seriam arredondadas para o inteiro inferior. Assim a heurística consiste basicamente em, a cada iteração, resolver um problema de corte de estoque relaxado e ordenar o vetor solução de forma específica (analisamos três formas de ordenação). Para cada posição deste vetor, na ordem especificada, arredonda-se a freqüência para o número inteiro acima do fracionário obtido e testa-se a factibilidade desta solução (no sentido de que excessos de itens não sejam gerados). Caso não seja factível (isto é, houve excesso de itens), a freqüência é reduzida de uma unidade até que excessos sejam eliminados. Quando o último padrão de corte gerado for examinado, atualiza-se a demanda, resultando num problema residual, que será tratado da mesma forma. É importante notar que no processo de geração de colunas, ao menos um dos padrões de corte gerados pode ser utilizado pelo menos uma vez. Isto garante que a demanda residual fica cada vez menor a cada iteração e, ao final, a demanda residual é nula.

3.1 Heurística Proposta

Na heurística proposta no presente trabalho são utilizados alguns conceitos da meta-heurística Algoritmos Genéticos. Resumidamente, a heurística pode ser descrita da seguinte forma:

Considere um indivíduo como sendo uma solução factível para o problema de corte de estoque, tal que seus padrões de corte possam ser caracterizados como um cromossomo, cujos genes representem cada um desses padrões.

Considere uma população inicial composta por diferentes soluções geradas rapidamente por diferentes métodos. Considere ainda alguns mecanismos evolutivos, tais como, critério de seleção, Função de Avaliação, critério de reprodução e critério de mutação.

O método consiste basicamente em construir soluções selecionando aleatoriamente (com maior probabilidade para soluções melhores) indivíduos da população e, posteriormente, escolhendo de forma aleatória os genes para compor a uma nova solução factível (novo indivíduo). Para cada solução a ser construída são escolhidos g genes. Se a solução gerada não atender a demanda de algum item, então é chamada uma heurística de construção para torná-la factível, ou seja, uma mutação é realizada.

Para cada indivíduo gerado é calculado o seu valor utilidade, caso essa solução construída seja melhor que alguma já existente na população, então esta substituirá alguém na população. Dessa forma a cada iteração é gerada uma solução até que o número de gerações chegue ao máximo.

4. Resultados Computacionais

A implementações do algoritmo e a parte gráfica do programa foram desenvolvidos utilizando a linguagem C++ e a ferramenta C++ Builder 6. Os testes computacionais foram realizados utilizando um PC com processador Intel Pentium M 740 Centrino 1.73 MHZ com 512MB de memória RAM.

Para os testes foram utilizados os exemplos cedidos por Poldi e Arenales (2005), que se basearam em um gerador aleatório proposto por Gau e Wascher (1995). Esses exemplos são divididos em classes, ao todo são 12 classes, cada uma com 20 exemplos, totalizando 240. As características das classes são de acordo com a Tab. 1:

Tabela 1. Características das classes.

	Parâmetros		
Classe	Número de barras	Número de itens	Tamanho dos itens
C1	3	5	Pequeno
C2	3	5	Médio
C3	3	20	Pequeno
C4	3	20	Médio
C5	5	10	Pequeno
C6	5	10	Médio
C7	5	20	Pequeno
C8	5	20	Médio
C9	7	10	Pequeno
C10	7	10	Médio
C11	7	20	Pequeno
C12	7	20	Médio

Após alguns testes computacionais iniciais os resultados foram comparados com aqueles obtidos por Poldi e Arenales (2005) e, se mostraram bastantes promissores em relação à perda total. Analisamos também o número de padrões diferentes utilizados que, embora não seja o foco dos nossos testes é um dado importante a ser analisado, desde que a troca de padrão pode envolver custo e tempo de preparação de máquina. Quando analisamos o número de padrões utilizados observamos que o resultado da heurística proposta é ainda melhor.

A comparação com os três métodos desenvolvidos por Poldi e ARenales (2005) visualizada na Tab. (2) e na Tab. (3).

Tabela 2. Média da perca total para as 12 classes.

	Média da perca total.			
Classe	Nova 1	Nova 2	Nova 3	Heurística Proposta
C1	166,85	166,85	152,40	105,85
C2	455,90	443,65	471,10	204,3
C3	121,60	121,60	94,45	77,35
C4	168,90	171,50	216,60	178,7
C5	84,45	85,45	85,45	68
C6	334,55	387,75	344,15	127,15
C7	95,95	100,15	90,80	46,6
C8	197,65	171,15	140,40	144,75
C9	56,95	51,10	43,50	104,85
C10	125,50	115,35	136,05	71,65
C11	96,30	91,85	99,30	16,5
C12	95,35	60,45	88,70	69,4

Tabela 3. Média do número de padrões de corte para as 12 classes.

	Média do número de padrões de corte			
Classe	Nova 1	Nova 2	Nova 3	Heurística Proposta
C1	4,00	4,00	3,90	2,8
C2	5,20	5,25	5,75	4,55
C3	9,15	9,15	9,15	8,2
C4	16,05	16,00	17,70	15,8
C5	5,30	5,30	5,30	4,75
C6	9,00	9,15	9,85	7,8
C7	8,40	8,40	8,45	7,85
C8	15,40	15,30	18,05	17,4
C9	5,35	5,35	5,40	4,8
C10	8,55	8,70	9,45	6,95
C11	8,30	8,35	8,25	7,9
C12	14,60	14,55	16,55	15,05

5. Conclusão

Nesse trabalho foi abordado o problema de corte de estoque unidimensional inteiro. Foram estudadas abordagens já existentes para a resolução desse problema e também foi proposta uma nova heurística com conceitos diferentes das heurísticas (construtivas e residuais) da literatura Heis, 2006.

Esse novo método apresentado pareceu muito promissor, considerando os resultados computacionais iniciais. Como trabalhos futuros deve-se aperfeiçoar o método modificando os parâmetros de forma a se conseguir melhorar ainda mais os resultados. Adicionalmente deve-se buscar melhorar o método em termos de tempo computacional.

6. Referências

GAU, T.; WÄSCHER, G. CUTGEN: a problem generator for the standard one-dimensional cutting-stock problems. European Journal of Operational Research, v. 84, p. 572-579, 1995.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. "A linear programming approach to the cutting stock problem". Operations Research, v. 9, p. 848-859, 1961.

HINXMAN, A. The trim-loss and assortment problems: a survey. European Journal of perational Research, v. 5, p. 8-18, 1980.

PINTO, M. J. O problema de corte de estoque inteiro. 1999. 92 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Comutação, USP, São Carlos.

POLDI, K. C.; ARENALES, M. N. Dealing with small demand in integer cutting stock problems with limited different stock lengths. Notas Technical report ICMC-USP, n. 85, 2005

STADTLER, H. A one-dimensional cutting stock problem in the Aluminium Industry and its solution. European Journal of Operational Research, v. 44, p. 209-223, 1990.

WÄSCHER, G.; GAU, T. Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computational study. OR Spektrum, v. 18, p. 131- 144, 1996.