

# NOÇÕES DE LÓGICA MATEMÁTICA

Gustavo Camargo Berti

## Objetivos

Este material foi elaborado para que você possa:

- interpretar e usar alguns símbolos matemáticos;
- ter noções básicas sobre conjuntos numéricos;
- conhecer os métodos de demonstração matemática.

## Iniciando o estudo

A linguagem matemática utiliza algarismos, letras e outros símbolos para sistematizar os raciocínios. Caso tentássemos explicar tudo com a escrita da língua portuguesa, o registro seria muito mais extenso. Por exemplo, a sentença “ao agruparmos um conjunto de cinco unidades e outro conjunto de quatro unidades formamos um único conjunto com nove unidades” pode ser substituída por “ $5 + 4 = 9$ ”. Ao longo deste estudo vamos conhecer os símbolos e relações que possibilitam a escrita e a compreensão do raciocínio lógico matemático.

## 1 Alguns símbolos matemáticos

Para compreender a linguagem matemática, é fundamental que você conheça alguns símbolos para que possa utilizá-los de maneira adequada. No Quadro 1 há uma listagem dos símbolos mais recorrentes na matemática escolar.

Quadro 1 - Símbolos matemáticos

=	Igual	∈	Pertence
≠	Diferente	∉	Não pertence
≈	Aproximadamente	∃	Existe
<	Menor	∄	Não existe
≤	Menor ou igual	∃!	Existe um único
>	Maior	∀	Para todo
≥	Maior ou igual	$a \vee b$	"a" ou "b"
∪	União	$a \wedge b$	"a" e "b"
∩	Intersecção	$\sim a$	Negação de "a"
⊃	Contém	$a \Rightarrow b$	Se acontecer "a" então acontece "b" ( <b>implicação</b> )
⊂	Está contido	$a \Leftrightarrow b$	Se acontecer "a" então acontece "b" e reciprocamente ( <b>se e somente se</b> )

Fonte: Elaborado pelo autor

Observe alguns exemplos de utilização em proposições verdadeiras:

**Exemplo 1:**

Língua portuguesa: A fração 7 sobre 2 é igual ao número decimal 3,5.

Linguagem matemática:  $\frac{7}{2} = 3,5$

**Exemplo 2:**

Língua portuguesa: O conjunto dos números racionais unido com o conjunto dos números irracionais equivale ao conjunto dos números reais.

Linguagem matemática:  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

### Exemplo 3:

Língua portuguesa: Se  $x$  é múltiplo de 4, então a metade de  $x$  é um número natural.

Linguagem matemática:  $x = 4k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{x}{2} \in \mathbb{N}$

## 2 Noções sobre conjuntos numéricos

Podemos pensar num conjunto como uma coleção (ou classe) de objetos, sem repetição e não ordenado. Os objetos de um conjunto são chamados de elementos ou membros do conjunto e podem ser listados entre chaves e separados por vírgula. Por exemplo, se  $C$  é o conjunto dos números naturais pares maiores que 5 e menores que 15, então podemos escrever  $C = \{6, 8, 10, 12, 14\}$ .

A notação  $x \in C$  (lê-se “ $x$  pertence ao conjunto  $C$ ”) significa que o objeto  $x$  é elemento do conjunto  $C$ . A negação de tal afirmação é  $x \notin C$  (lê-se “ $x$  não pertence ao conjunto  $C$ ”). Pensando no exemplo anterior, temos que  $8 \in C$  e  $5 \notin C$ .

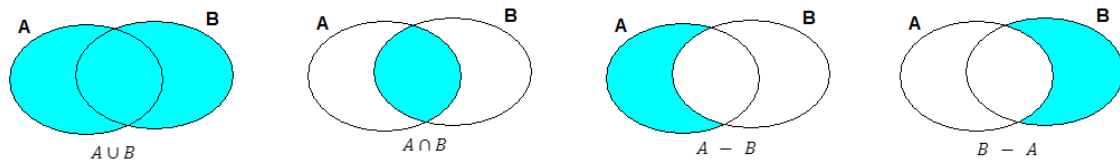
Quando todo elemento de um conjunto  $A$  é também elemento de um conjunto  $B$ , dizemos que  $A$  está contido em  $B$  e escrevemos  $A \subset B$ . Nesse caso, temos que  $A$  é **subconjunto** de  $B$ . Como exemplo podemos pensar que o conjunto dos múltiplos de 4 é um subconjunto dos múltiplos de 2, pois todo múltiplo de 4 também é múltiplo de 2.

Dados dois conjuntos, a **união** destes, simbolizada por “ $\cup$ ”, é o conjunto de todos os elementos pertencentes a um conjunto ou ao outro. Já a **intersecção**, simbolizada por “ $\cap$ ”, consiste no conjunto dos elementos que pertencem a ambos. Outra operação possível entre dois conjuntos é a de **diferença**, simbolizada por “ $-$ ”, que consiste em considerar os elementos que estão no primeiro, mas não estão no segundo. Por exemplo, dados os conjuntos  $C = \{6, 8, 10, 12, 14\}$  e  $D = \{5, 10, 12\}$ , temos que  $C \cup D = \{5, 6, 8, 10, 12, 14\}$ ,  $C \cap D = \{10, 12\}$ ,  $C - D = \{6, 8, 14\}$  e  $D - C = \{5\}$ .

Os **diagramas de Euler-Venn** constituem um recurso didático para a visualização das operações com conjuntos. Na figura 1, a parte azul representa a

região em que se encontram os elementos de cada operação entre conjuntos em cada diagrama.

Figura 1 - Diagramas de Euler-Venn



Fonte: Elaborado pelo autor

### 3 Demonstrações matemáticas

Em uma implicação lógica temos uma **hipótese** e uma **tese**. No exemplo a seguir, a hipótese é “ $x$  é múltiplo de 6” e a tese é “ $x$  é um múltiplo de 3”.

Se  $x$  é múltiplo de 6, então  $x$  também é múltiplo de 3.

Que também pode ser escrito como:

$$x = 6k_1, k_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 3k_2, k_2 \in \mathbb{N}$$

A implicação acima é verdadeira, mas tal fato não pode ser provado empiricamente, elencando alguns múltiplos de 6 e verificando se todos eles são múltiplos de 3. Na próxima subseção, veremos algumas técnicas de demonstração matemática utilizando argumentos genéricos para provar o fato em questão.

Convém observar que para provar que uma implicação matemática é falsa, basta apresentar um **contraexemplo**, ou seja, apresentar um exemplo que satisfaz a hipótese, mas não satisfaz a tese. Vejamos:

Se  $x$  é múltiplo de 3, então  $x$  também é múltiplo de 6.

Que também pode ser escrito como:

$$x = 3k_1, k_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 6k_2, k_2 \in \mathbb{N}$$

É uma implicação falsa, pelo contraexemplo  $x = 15$ , que é um múltiplo de 3, pois  $3 \cdot 5 = 15$ , mas não é múltiplo de 6.

### 3.1 Demonstração de implicações verdadeiras

Para demonstrar a veracidade das implicações, apresentamos três técnicas: demonstração direta, demonstração contrapositiva e demonstração por absurdo.

#### 3.1.1 Demonstração direta

Consiste em uma sequência de implicações verdadeiras, partindo da hipótese até chegar na tese. Exemplo:

$$x = 6k_1, k_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 3k_2, k_2 \in \mathbb{N}$$

Ou seja, se  $x$  é múltiplo de 6, então  $x$  é múltiplo de 3.

Partindo da hipótese:  $x = 6k_1$

O que implica em:  $x = 3 \cdot 2k_1$

O que, considerando  $2k_1 = k_2$ , implica em:  $x = 3 \cdot k_2$  (tese)

Note que também podemos escrever utilizando o símbolo para implicação:

$$x = 6k_1, k_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 3 \cdot 2k_1 \Rightarrow x = 3 \cdot k_2, k_2 \in \mathbb{N}$$

#### 3.1.2 Demonstração contrapositiva

Consiste em negar a tese e, a partir de uma sequência de implicações verdadeiras, chegar à negação da hipótese. Exemplo:

$$x = 2k_1 + 1, k_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow x^2 = 2k_2 + 1, k_2 \in \mathbb{N}$$

Ou seja, se  $x$  é um número ímpar, então  $x^2$  também é um número ímpar.

Partindo da negação da tese:  $x^2 = 2k_2, k_2 \in \mathbb{N}$  ( $x^2$  é par)

O que implica que:  $\frac{x^2}{2} = k_2$

O que implica que:  $\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} = k_2$

O que implica que:  $x = 2k_1, k_1 \in \mathbb{N}$  (pois  $\frac{x}{2}$  precisa ser um número natural para que  $k_2$  seja natural), ou seja,  $x$  é par (negação da hipótese).

Alternativamente, utilizando símbolo de implicação:

$$x^2 = 2k_2, k_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = k_2 \Rightarrow \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} = k_2 \Rightarrow x = 2k_1, k_1 \in \mathbb{N}$$

Por demonstração contrapositiva provamos a implicação original.

### 3.3.3 Demonstração por redução ao absurdo

Consiste em supor que a hipótese é válida e que a tese é falsa e chegar em uma contradição. Exemplo:

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$$

Ou seja,  $\sqrt{2}$  não é um número racional.

Considerando a hipótese verdadeira e a tese falsa:

$x = \sqrt{2}$  e  $x = \frac{a}{b}$ , uma fração irredutível (todo número racional pode ser escrito na forma de fração irredutível)

O que implica que:  $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$

O que implica que:  $a = b\sqrt{2}$  (I) e  $\frac{a}{\sqrt{2}} = b$  (II)

(I) implica que (elevando ambos os lados ao quadrado):  $a^2 = 2b^2$  ( $a^2$  é par)

O que implica que:  $a = 2k_1$  (provado em demonstração anterior)

O que implica, também considerando (II) que:  $\frac{2k_1}{\sqrt{2}} = b$

O que implica que (elevando ambos os lados ao quadrado):  $\frac{4k_1^2}{2} = b^2$  ( $b^2$  é par)

O que implica que:  $b = 2k_2$  (provado em demonstração anterior)

O que implica que:  $\frac{a}{b} = \frac{2k_1}{2k_2}$  (**contradição com o fato de  $\frac{a}{b}$  ser uma fração irredutível**).

Por redução ao absurdo, provamos a veracidade da implicação inicial.

### Concluindo o estudo

A partir da compreensão dos tópicos expostos neste estudo, conseguiremos desenvolver o raciocínio lógico matemático. Não se assuste com as demonstrações matemáticas, aos poucos vamos nos acostumando e compreendendo que a formalização e a estruturação dos argumentos são essenciais para a exposição das ideias.

## Referências utilizadas para a elaboração deste material

CARVALHO, N. T. B.; GIMENEZ, C. S. C. **Fundamentos de matemática I**. Florianópolis: UFSC/ EAD/CED/CFM, 2009. Disponível em: <<https://mtmgrad.paginas.ufsc.br/files/2014/04/Fundamentos-de-Matem%C3%A1tica-I.pdf>>. Acesso em 12 dez. 2022.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, J. F. P. **Números racionais, reais e complexos**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/212829>>. Acesso em 12 dez. 2022.